## Лабораторная работа 2

## Решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ

Постановка задачи. Бродячий торговец должен посетить $n$ городов и вернуться в исходный. Маршрут должен проходить через каждый город, причем один и только один раз. Расстояния (транспортные издержки, время на переезд и т.д.) между городами известны — $c_{ij}\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}$. Требуется отыскать самый короткий (либо самый дешевый, либо самый быстрый и т.д.) маршрут.

Математическая модель:

$$\text{Пусть } x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{в маршруте есть переезд из i города в } j;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \quad i=\overline{1,n} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \quad j=\overline{1,n} \quad (3)$$

$x=\left(x_{ij},i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\right)$ — некоторый маршрут, $L(x)$ — суммарные издержки; (2) означает, что из каждого города торговец выезжает только раз; (3) означает, что в каждый город он въезжает один раз. К математической модели надо добавить дополнительное ограничение, исключающее замкнутые подциклы (подмаршруты) в маршрутах

Реализация метода ветвей и границ.

Рассмотрим дерево всевозможных маршрутов (см, рис.1, $n = 5$). Так как маршрут замкнут, то все равно из какого города начинать. Каждому маршруту соответствует ветвь дерева, начинающаяся на 1 уровне дерева в городе 1 и заканчивающаяся на последнем уровне в одном из городов. Ясно, что всего маршрутов $(n — 1)!$.

- С помощью дерева любое подмножество маршрутов можно разбить на более мелкие подмножества. Например, (см.рис.1), все множество маршрутов можно разбить на четыре подмножества с начальными участками: *{1, 2}*, *{1,3}*, *{1,4}* и *{1,5}*. Причем каждое такое подмножество включает *(5-2)!=3!=6* маршрутов дальнейших продолжений начального участка.
- Для каждого подмножества маршрутов может быть подсчитана эффективная нижняя граница по следующему способу.

Например, пусть задана матрица транспортных издержек

$$C=\begin{pmatrix} - & 8 & 18 & 14 & 8\\ 17 & - & 21 & 7 & 11\\ 20 & 9 & - & 8 & 12\\ 5 & 31 & 12 & - & 9\\ 4 & 3 & 15 & 6 & - \end{pmatrix}$$

Для нахождения оценки начального участка $\{1,2\}$ —$\xi\{1,2\}$ строим подматрицу матрицы *C* вычеркивая в ней первую строку и второй столбец. У полученной подматрицы $\overline{C}$ находим минимальные элементы у строк. Отнимаем их от элементов соответствующих строк и получаем подматрицу $\overline{\overline{C}}$. Находим у нее минимальные элементы у столбцов. В качестве оценки $\xi$ берется сумма минимальных элементов строк подматрицы $\overline{C}$ и столбцов $\overline{\overline{C}}$ и длины начального участка

$$\overline{C}=\begin{pmatrix}17&21&7&11\\20&-&8&12\\5&12&-&9\\4&15&6&-\end{pmatrix}\begin{matrix}7\\8\\5\\4\end{matrix}\qquad \overline{\overline{C}}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}10&14&0&4\\12&-&0&4\\0&7&-&4\\0&9&2&-\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}0&7&0&4\end{matrix}\end{array};\quad c_{12}=8$$

$\zeta\{1,2\}=(7+8+5+4+0+7+0+4)+8=43$

Для нахождения оценки для участка *{1,5,3}* у матрицы *C* вычеркиваются строки 1 и 5 и столбцы 5 и 3.

В общем случае для подсчета оценки произвольного участка у матрицы *C* вычеркивают строки для городов из которых торговец выезжает и столбцы для городов куда он приезжает.

- Для вычисления рекорда итерации выбираются один либо несколько маршрутов. Вычисляются их длины. Рекордом *r* будет длина самого короткого из них. Соответствующий маршрут будет рекордным. На итерациях рекорд может быть улучшен.
- Если для некоторого подмножества маршрутов $\xi \ge r$, то его (и соответствующую ветвь дерева) можно исключить как заведомо не содержащую лучшего маршрута, чем рекордный. Решение задачи заканчивается когда будут отсечены все ветви.

Пример (для матрицы (4)).

0 итерация. $S_0=\{X\}$.

Вычислим $\xi(X)=8+7+8+5+3+7=38$. Вычислим длину одного из маршрутов $L(1,5,2,4,3,1)=8+3+7+12+20=50$. Он и будет пока рекордным. Так как $\xi_0=38<50=r_0$, то разбиваем *X* на 4 подмножества с начальными участками: *(1,2), (1,3),(1,4),(1,5).*

Вычислим их оценки: $\xi(1,2)=43; \xi(1,3)=45; \xi(1,4)=59; \xi(1,5)=38;$

Строим список множеств для 1 итерации: $S_1=\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$. Множество (1,4) отсекается, так как $\xi(1,4)=59>50=r_0$.

1 итерация. Вычислим $\xi_1=\min\{\xi(1,2),\xi(1,3),\xi(1,5)\}=38\quad r_1=r_0=50$.

Так как $r_1=50>38=\xi_1$ то продолжим итерации. Разбиваем множество с наименьшей оценкой *(1,5)* на 3 подмножества: *(1,5,2), (1,5,3),(1,5,4).* Вычислим их оценки: $\xi(1,5,2)=38;\ \xi(1,5,3)=44;\ \xi(1,5,4)=49$. Имеем $S_2=\{(1,2)(1,3),(1,5,2).(1,5,3),(1,5,4)\}$

2 <u>итерация</u>. $\xi_2 = 38, r_2 = r_0 = 50$ Разбиваем *(1,5,2): (1,5,2,3), (1,5,2,4)*. У этих множеств лишь по одному элементу не хватает до полного маршрута. Поэтому вычислим длину маршрутов $L(1,5,2,3,4,1) = 45, L(1,5,2,4,3,1) = 50$. Получаем новый рекорд *45* и имеем $S_3 = \{(1,2)(1,5,3)\}$. Остальные подмножества отсекаются.

<u>3</u> <u>итерация</u>. $\xi_3 = 43, r_3 = 45$. Разбиваем *(1,2): (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5)*. $\xi(1,2,3) = 48, \xi(1,2,4) = 43, \xi(1,2,5) = 43$ Имеем $S_4 = \{(1,2,4),(1,5,3),(1,2,5)\}$.

4 <u>итерация</u>. $\xi_4 = 43, r_4 = 45$. Разбиваем *(1,2,4): (1,2,4,3), (1,2,4,5)*. Вычислим $L(1,2,4,3,5,1) = 43, L(1,2,4,5,3,1) = 59$. Новый рекорд *43*.

5 <u>итерация</u>. Так как $\xi_5 = r_5 = 43$, то маршрут *(1,2,4,3,5,1)* — оптимальный, $L^0 = 43$.

Дерево вариантов этой задачи имеет вид (см. рис. 2):

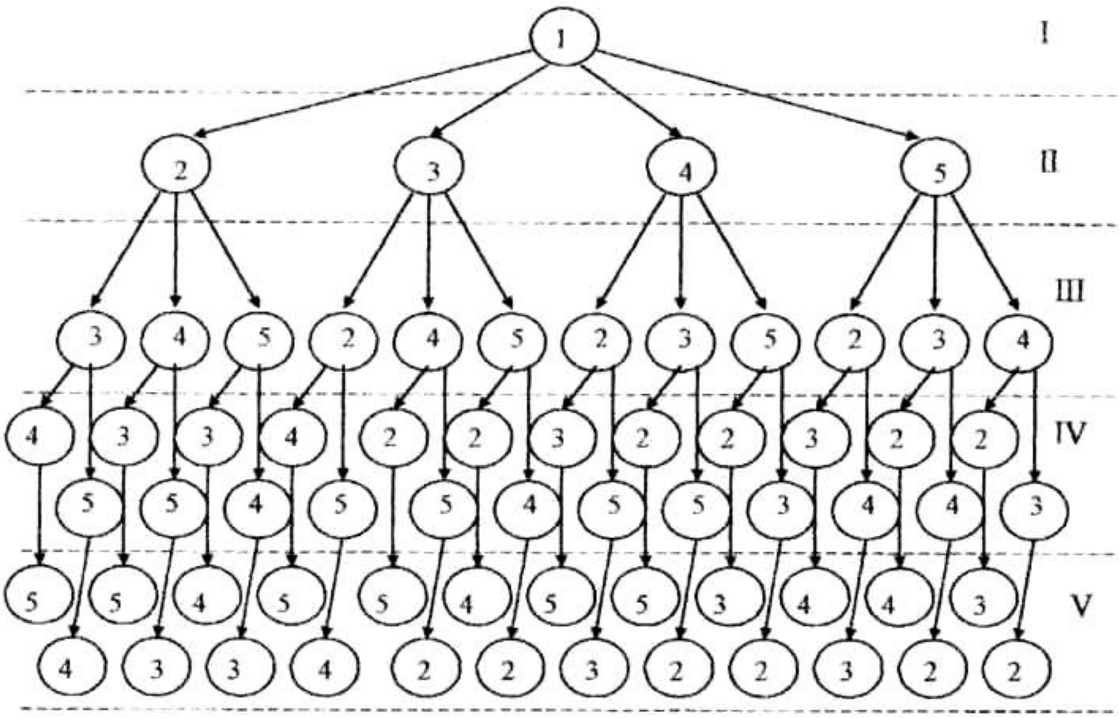


Рис.1

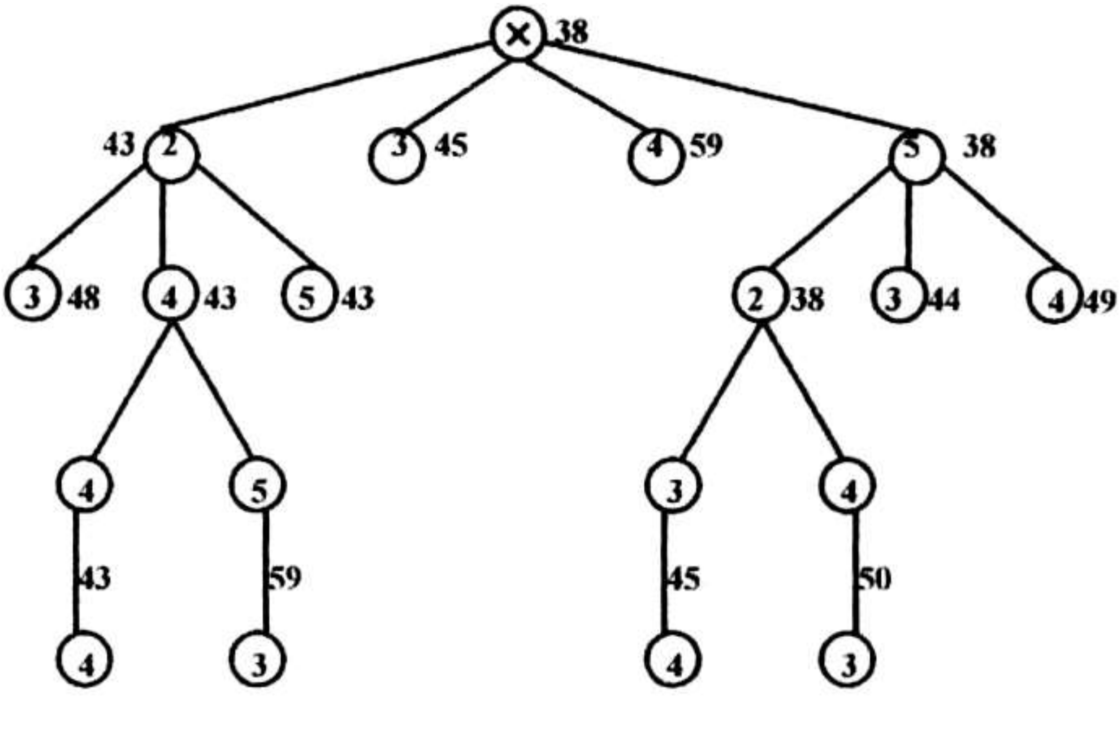

Рис.2.Дерево вариантов метода.

**Задание.** Решить задачу о коммивояжере методом ветвей и границ. Построить дерево вариантов для своей задачи.

1) $C = \begin{pmatrix} - & 4 & 33 & 17 & 39 \\ 22 & - & 49 & 7 & 57 \\ 12 & 11 & - & 20 & 59 \\ 8 & 37 & 16 & - & 5 \\ 44 & 13 & 32 & 21 & - \end{pmatrix}$ 2) $C = \begin{pmatrix} - & 21 & 4 & 33 & 17 \\ 39 & - & 22 & 49 & 7 \\ 57 & 12 & - & 11 & 20 \\ 59 & 8 & 37 & - & 16 \\ 5 & 44 & 13 & 32 & - \end{pmatrix}$ 3) $C = \begin{pmatrix} - & 31 & 20 & 3 & 32 \\ 16 & - & 38 & 21 & 48 \\ 6 & 56 & - & 11 & 16 \\ 19 & 58 & 7 & - & 36 \\ 15 & 6 & 43 & 12 & - \end{pmatrix}$

4) $C = \begin{pmatrix} - & 12 & 31 & 20 & 3 \\ 31 & - & 16 & 38 & 21 \\ 48 & 6 & - & 56 & 11 \\ 10 & 19 & 58 & - & 7 \\ 36 & 15 & 4 & 43 & - \end{pmatrix}$ 5) $C = \begin{pmatrix} - & 44 & 13 & 32 & 21 \\ 4 & - & 33 & 17 & 39 \\ 22 & 49 & - & 7 & 57 \\ 12 & 11 & 20 & - & 59 \\ 8 & 37 & 16 & 5 & - \end{pmatrix}$ 6) $C = \begin{pmatrix} - & 34 & 25 & 17 & 45 \\ 48 & - & 32 & 14 & 65 \\ 31 & 24 & - & 34 & 11 \\ 16 & 9 & 33 & - & 22 \\ 36 & 27 & 25 & 9 & - \end{pmatrix}$

7) $C = \begin{pmatrix} - & 16 & 5 & 44 & 13 \\ 32 & - & 21 & 4 & 33 \\ 19 & 13 & - & 27 & 14 \\ 17 & 57 & 12 & - & 11 \\ 20 & 59 & 8 & 37 & - \end{pmatrix}$ 8) $C = \begin{pmatrix} - & 20 & 59 & 8 & 37 \\ 16 & - & 5 & 44 & 13 \\ 32 & 21 & - & 4 & 33 \\ 17 & 39 & 22 & - & 49 \\ 7 & 57 & 12 & 11 & - \end{pmatrix}$ 9) $C = \begin{pmatrix} - & 8 & 37 & 16 & 5 \\ 44 & - & 13 & 32 & 21 \\ 4 & 33 & - & 17 & 39 \\ 22 & 49 & 7 & - & 57 \\ 12 & 11 & 20 & 59 & - \end{pmatrix}$

10) $C = \begin{pmatrix} - & 59 & 8 & 37 & 16 \\ 5 & - & 44 & 13 & 32 \\ 21 & 4 & - & 33 & 17 \\ 39 & 22 & 49 & - & 7 \\ 57 & 12 & 11 & 20 & - \end{pmatrix}$ 11) $C = \begin{pmatrix} - & 7 & 33 & 18 & 39 \\ 21 & - & 48 & 7 & 56 \\ 12 & 11 & - & 20 & 59 \\ 8 & 37 & 16 & - & 5 \\ 44 & 13 & 32 & 21 & - \end{pmatrix}$ 12) $C = \begin{pmatrix} - & 11 & 20 & 59 & 8 \\ 37 & - & 16 & 5 & 44 \\ 13 & 32 & - & 21 & 4 \\ 33 & 17 & 39 & - & 22 \\ 49 & 7 & 57 & 12 & - \end{pmatrix}$

13) $C = \begin{pmatrix} - & 9 & 8 & 33 & 25 \\ 15 & - & 13 & 49 & 17 \\ 20 & 31 & - & 23 & 41 \\ 8 & 55 & 6 & - & 15 \\ 32 & 18 & 53 & 17 & - \end{pmatrix}$ 14) $C = \begin{pmatrix} - & 4 & 8 & 72 & 38 \\ 71 & - & 12 & 13 & 43 \\ 18 & 23 & - & 36 & 19 \\ 2 & 15 & 6 & - & 5 \\ 25 & 33 & 28 & 34 & - \end{pmatrix}$ 15) $C = \begin{pmatrix} - & 18 & 12 & 34 & 57 \\ 12 & - & 32 & 44 & 61 \\ 5 & 28 & - & 40 & 12 \\ 22 & 31 & 15 & - & 14 \\ 17 & 29 & 71 & 31 & - \end{pmatrix}$

16) $C = \begin{pmatrix} - & 64 & 5 & 16 & 27 \\ 29 & - & 45 & 51 & 6 \\ 33 & 11 & - & 23 & 19 \\ 22 & 16 & 14 & - & 39 \\ 40 & 37 & 9 & 24 & - \end{pmatrix}$ 17) $C = \begin{pmatrix} - & 8 & 6 & 8 & 14 \\ 3 & - & 4 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & - & 10 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & - & 6 \\ 9 & 2 & 10 & 7 & - \end{pmatrix}$ 18) $C = \begin{pmatrix} - & 6 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & - & 1 & 9 & 4 \\ 15 & 3 & - & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & - & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & - \end{pmatrix}$

19) $C = \begin{pmatrix} - & 22 & 19 & 17 & 11 \\ 31 & - & 20 & 16 & 18 \\ 11 & 15 & - & 33 & 41 \\ 12 & 17 & 14 & - & 18 \\ 34 & 12 & 15 & 11 & - \end{pmatrix}$ 20) $C = \begin{pmatrix} - & 10 & 2 & 8 & 14 \\ 20 & - & 28 & 75 & 9 \\ 15 & 9 & - & 25 & 16 \\ 14 & 38 & 16 & - & 41 \\ 42 & 23 & 13 & 11 & - \end{pmatrix}$ 21) $C = \begin{pmatrix} - & 9 & 8 & 10 & 16 \\ 12 & - & 14 & 23 & 21 \\ 30 & 16 & - & 32 & 24 \\ 27 & 19 & 13 & - & 18 \\ 17 & 39 & 12 & 14 & - \end{pmatrix}$

22) $$C=\begin{pmatrix} - & 11 & 13 & 15 & 9 \\ 18 & - & 8 & 4 & 12 \\ 22 & 2 & - & 14 & 6 \\ 31 & 1 & 8 & - & 15 \\ 4 & 5 & 6 & 17 & - \end{pmatrix}$$

23) $$C=\begin{pmatrix} - & 10 & 17 & 21 & 14 \\ 22 & - & 12 & 15 & 20 \\ 4 & 6 & - & 18 & 2 \\ 33 & 11 & 5 & - & 7 \\ 18 & 13 & 14 & 17 & - \end{pmatrix}$$

24) $$C=\begin{pmatrix} - & 27 & 39 & 26 & 12 \\ 28 & - & 34 & 29 & 15 \\ 33 & 48 & - & 41 & 36 \\ 55 & 38 & 62 & - & 40 \\ 53 & 44 & 46 & 31 & - \end{pmatrix}$$

25) $$C=\begin{pmatrix} - & 14 & 23 & 17 & 39 \\ 22 & - & 49 & 7 & 57 \\ 12 & 11 & - & 20 & 59 \\ 8 & 37 & 16 & - & 5 \\ 44 & 13 & 32 & 26 & - \end{pmatrix}$$

26) $$C=\begin{pmatrix} - & 21 & 34 & 33 & 17 \\ 39 & - & 22 & 49 & 7 \\ 57 & 12 & - & 21 & 20 \\ 59 & 8 & 37 & - & 16 \\ 5 & 24 & 13 & 32 & - \end{pmatrix}$$

27) $$C=\begin{pmatrix} - & 5 & 34 & 18 & 40 \\ 23 & - & 50 & 8 & 58 \\ 13 & 12 & - & 21 & 60 \\ 9 & 38 & 17 & - & 6 \\ 45 & 14 & 33 & 22 & - \end{pmatrix}$$

28) $$C=\begin{pmatrix} - & 39 & 57 & 59 & 5 \\ 21 & - & 12 & 8 & 44 \\ 4 & 22 & - & 37 & 13 \\ 33 & 49 & 11 & - & 32 \\ 15 & 44 & 23 & 32 & - \end{pmatrix}$$

29) $$C=\begin{pmatrix} - & 5 & 34 & 18 & 40 \\ 22 & - & 50 & 8 & 58 \\ 13 & 12 & - & 21 & 60 \\ 9 & 38 & 17 & - & 6 \\ 45 & 14 & 33 & 22 & - \end{pmatrix}$$

30) $$C=\begin{pmatrix} - & 20 & 3 & 32 & 16 \\ 38 & - & 21 & 48 & 6 \\ 56 & 11 & - & 10 & 19 \\ 58 & 7 & 36 & - & 15 \\ 4 & 43 & 12 & 31 & - \end{pmatrix}$$